رایج شدن یک فرهنگ اثبات در هندسه مدرسه‌ای:

تکامل اثبات دوستونی در اوایل قرن بیستم

(بخش دوم)

پاتریسیو جی. هربست
ترجمه: حسین غفاری
کارشناس ارشد آموزش ریاضی

چکیده بخش اول

همراه با اصلاحات دهۀ ۱۸۹۰، و در زمانی‌که هندسه به‌عنوان جایی برای دانش‌آموزان جهت یادگیری «هنر اثبات کردن»، در نظر گرفته شد؛ در آمریکا انتظار از دانش‌آموزانِ دبیرستانی برای اثبات حکم‌های هندسی، تبدیل به یک هنجار شد. در واکنش به مطالبۀ اصلاحات، در حرفۀ معلمی فرهنگی شکل گرفت که طی آن از دانش‌آموزان خواسته می‌شد که «اثبات» تولید کنند و آن را در « قالب دوستونی» به‌صورت گزاره‌هایی همراه با دلیل درستی هر گزاره بنویسند. در قسمت اول این مقاله گزارشی از زمانی که هندسه به‌عنوان یک موضوع درسی مطرح شد تا وقتی که اثبات به مرکز و محور درس هندسه تبدیل شد، عرضه گردید. همچنین با استفاده از توجیهات تاریخی توضیح داده می‌شودکه چگونه قالب اثبات دوستونی این امر را امکان‌پذیر ساخت که معلمان بتوانند ادعا کنند اثبات کردن را به دانش‌آموزان یاد می‌دهند و در عین حال دانش‌آموزان بتوانند نشان دهند فعالیت‌های آن‌ها شامل اثبات کردن می‌شود. در ادامه آشکار می‌شود که ماهیت هندسۀ مدرسه‌ای، تحت تأثیر اصرار بر یاددهی اثبات، به چه چیزی تبدیل شده است.

کلیدواژه‌ها: اثبات، هندسه، هندسه مدرسه‌ای

مطالبی که باید نحوۀ اثبات کردن را به دانش‌آموزان یاد می‌دادند

متفاوت بودن حکم‌های بنیادی و تمرین‌ها، نقش مهمی در امکان‌پذیر ساختن تدریس هنر اثبات کردن، ایفا کرد. حکم‌های بنیادین هم موضوع درس را بسط و گسترش دادند و هم ابزاری برای دانش‌آموزان جهت انجام اثبات، فراهم ساختند، اما بسیار ضروری بود که دانش‌آموزان روی تمرین‌ها کار کنند و با موفقیت آن‌ها را اثبات کنند. کتاب‌های درسی هندسۀ آن زمان نشان می‌دهند که نویسندگان هنگام ایجاد تعادل بین حکم‌های بنیادین و تمرین‌ها، با پرسش‌های مشکل فراوانی مواجه بودند. اینکه چه حکم‌هایی باید بنیادین در نظر گرفته شوند؟ با چه ترتیبی باید در کتاب آورده شوند؟ نحوۀ «اکتشاف» اثبات آن‌ها چگونه باید در کتاب شرح داده شود؟ تنوع بسیاری در نحوۀ ارائۀ این حکم‌های بنیادین در کتاب‌های درسی هندسه، از اوایل قرن، قابل مشاهده است (اسمیت، ۱۹۰۹؛ شولتز و سون‌اوک، ۱۹۱۳؛ شیبلی، ۱۹۳۲). با توسل به شیوه‌های مختلف، نویسندگان سعی داشتند که با حفظ تعادل بین یکپارچگی موضوع هندسی ارائه شده و سودمند بودن آن، در دانش‌آموزان توانایی انجام تمرین‌ها را ایجاد کرده و آن‌ها را در این راه حمایت کنند. آن‌ها همچنین تلاش کردند که تعداد حکم‌های بنیادین را کم، و تعداد تمرین‌ها را زیاد کنند.

تغییرات در مسائلی که باید اثبات می‌شدند و گزاره‌هایی که می‌شد به‌عنوان اصل در نظر گرفت

کمیتۀ ۱۸۹۹ با توسل به ملاحظات پداگوژیکی پیشنهاد کرد که شیوۀ ارائۀ اصول تغییر کند. این کمیته توصیه کرد که معرفی اصولی که «تقریباً بدیهی» هستند به مراحل بعد موکول (نایتینگل و

همکاران، ۱۸۹۹، ص۱۴۲)، و حکم‌های بدیهی مانند «تمام زاویه‌های قائمه با هم برابرند» حذف شوند.

در همان زمان، ریاضی‌دانان پیشرفت‌های مهمی در زمینهٔ ارائهٔ هندسهٔ اقلیدسی براساس اصولی یکپارچه، کرده بودند. مثلاً نکاتی را که اقلیدس بدون هیچ توضیحی مفروض گرفته بود، به‌عنوان اصل در نظر گرفتند (برای نمونه هیلبرت[1]، ۱۸۹۹/۱۹۷۱). البته این امر با توصیه‌های رایج آن دورهٔ ایالات متحده دربارهٔ روش تدریس هندسه، هم‌سو نبود. کمیتهٔ پانزده، جهت تصمیم‌گیری در این باره، توصیهٔ ریاضیاتی مبنی بر «کم‌ترین فرض‌های ممکن» را در برابر ملاحظات پداگوژیکی که بیان می‌داشت «چنین فهرستی برای دانش‌آموزان قابل فهم نیست»، مورد بررسی و ارزیابی قرار داد (اسلات و همکاران، ۱۹۱۲، ص ۸۱). اصولی که آن‌ها انتخاب کردند بین ملاحظات ریاضیاتی و ملاحظات دربارهٔ یادگیرنده‌ها، تعادل برقرار کرد:

مبنایی که باید در نظر گرفته شود این است که ترتیب منطقی حفظ شود و اثبات رسمی حکم‌هایی که برای رعایت چنین ترتیبی ضروری هستند، ارائه شود. این شیوه با اصول آموزشی مربوط به سازگاری موضوع با ذهن یادگیرنده، همخوانی دارد (اسلات و همکاران، ۱۹۱۲، ص ۸۱).

همچنین شولتز (۱۹۱۲) ابراز داشت که پیشرفت در بنیان نهادن هندسه بر مبنای اصول، بر هندسهٔ درسی تأثیر گذاشت، چرا که در نظر گرفتن اصولی را غیر از اصول اقلیدس برای تدریس هندسه توجیه کرده بود:

هنگام گردآوری اصول، تلاش برای دست‌یابی به فهرستی جامع و کامل ضروری نیست. یک گزاره را می‌توان به‌عنوان یک اصل در نظر گرفت حتی اگر بتوان آن را از اصول دیگر نتیجه گرفت؛ و اگر لازم شد گزاره‌ای به‌عنوان اصل در نظر گرفته شود می‌توان حتی دلیل همه فهمی[2] برای آن ارائه کرد.

به‌طور مشابه، جورج کارسون[3] پیشنهاد کرد که تمام ویژگی‌هایی که «می‌توان به دانش‌آموزان القا کرد که بدون اندازه‌گیری عددی قبول کنند»، در قالب مفروضات ارائه شوند (کارسون، ۱۹۱۳، ص ۹۸).

این امکان که اصل‌های پیشنهادی قابل انتخاب بودند بسیار راهگشا بود. تأکید کمیتهٔ ده نفره بر استفاده از هندسه به‌عنوان زمینه‌ای برای یادگیری اثبات، به متداول شدن یک تصور ویژه دربارهٔ اثبات در هندسه کمک کرده بود که قبلاً و در دورهٔ کارهای اصیل، به شکل بالقوه‌ای وجود داشت. طبق این تصور، وجود و خواص اشیاء هندسی، مستقل از اینکه اثبات شده باشند، حقایقی مفروض بودند. پشتوانهٔ چنین تصوری، وجود اثبات‌هایی هستند که درستی آن خواص را نشان می‌دهند که می‌توان با بیان کردن شرایط نظری آن‌ها، خواص مذکور را به‌عنوان حقایقی درست در نظر گرفت. در نتیجهٔ چنین حرکتی، زیاد یا کم بودن تعداد اصول تفاوت چندانی نداشت چراکه تمام آن‌ها حقایقی پذیرفته شده بودند؛ و این نکته باعث کاهش تعداد حکم‌های بنیادینی بود که دانش‌آموزان باید چگونگی اثبات آن‌ها را می‌دانستند. حکم‌های بنیادینی که باید اثبات شوند، آن‌هایی بودند که یا نقشی اساسی در توسعهٔ موضوع درس داشتند و یا روش‌های اثبات کردن را نشان می‌دادند؛ نه آن‌هایی که بسیار بدیهی بودند و می‌شد آن‌ها را به‌عنوان اصل در نظر گرفت. کاهش در تعداد حکم‌های بنیادین، اجازه می‌داد که دانش‌آموزان بیشتر وقت کلاس را صرف تولید اثبات برای تمرین‌ها کنند. همچنین وجود فهرستی طولانی از حکم‌هایی که به‌عنوان اصل در نظر گرفته شدند، به دانش‌آموزان این اجازه را می‌داد که از نتایج آن‌ها استفاده کنند، بدون اینکه بدانند آن نتایج به چه دلیل درست هستند. بنابراین، از هر فرضی می‌توانستند به‌عنوان دلیل، در اثبات یک حکم استفاده کنند، چراکه آن را درست فرض کرده‌اند و مطرح کردن این پرسش که آیا این حکم با استفاده از حکم‌های دیگر قابل اثبات هست یا نه، ضروری نخواهد بود. در آخر، این حقیقت که هندسهٔ ملموس (شامل نحوهٔ کشیدن اشیای هندسی)، قبل از هندسهٔ اثباتی تدریس می‌شود، پرسش‌های مربوط به وجود اشیاء هندسی را از میان خواهد برد. از این جهت مهم است که توجه شود که در دههٔ اول قرن، کتاب‌های درسی هندسه شروع به ارائهٔ بخش مقدمهٔ مفصلی (که معمولاً برای تعریف بعضی از اشیاء هندسی و بیان چند اصل، استفاده می‌شد) کردند که شامل عناصر هندسهٔ ملموس (به‌ویژه ترسیم‌ها) بود. از این‌رو، حتی اگر دانش‌آموزی هندسهٔ ملموس را قبلاً در دورهٔ ابتدایی ندیده بود، در هندسهٔ دبیرستان، در دو بخش با هندسه مواجه می‌شد. در بخش اول با حقایق هندسی و در بخش دوم با سازماندهی منطقی

این انتظار از معلمان و کتاب‌های درسی وجود داشت که اثبات مسائل بنیادین را به‌صورت گزاره‌هایی همراه با دلایلشان ارائه کنند: اثبات باید به‌گونه‌ای ارائه شود که یک «مبتدی» هم متوجه شود که اثبات و بحث مورد نظر چگونه سرهم شده است

آن‌ها، همان‌طور که کمیتهٔ ده نفره پیشنهاد کرده بود.

تغییرات در نشانه‌گذاری و چگونگی ارائهٔ شکل‌ها

نوآوری‌هایی که در نشانه‌گذاری و زبان استفاده می‌شد در جهت حمایت اثبات دانش‌آموزی بودند. این عقیده که اثبات از «مراحل موجزی» تشکیل شده است (بمن و اسمیت، ۱۸۹۹، ص ۲۰)، دانش‌آموزان را از مواجهه با بحث‌های غیرضروری دور می‌کرد. با این وجود، برای اینکه این اتفاق بیفتد، باید زبانی که در دسترس بود، اجازهٔ این خلاصه‌نویسی را می‌داد. بنابراین، نوشتن اثبات‌ها با نمادهای انعطاف‌پذیرتر، متداول شد (برای مثال، نشان دادن زاویه با نمادهای مختلف). همچنین، بیان خلاصهٔ حکم‌های خاصی، رایج گردید (برای نمونه، قضیه‌ای که تساوی دو مثلث به حالت دو زاویه و ضلع بین را تضمین می‌کرد، به‌طور خلاصه «ز ض ز» نامیده می‌شد). این‌طور به‌نظر می‌رسید که چنین خلاصه‌نویسی‌هایی دانش‌آموزان را کمک می‌کرد که هنگام نوشتن اثبات، به قضیه‌های قبلی دسترسی مستقیم داشته باشند. تمام این تغییرات به دانش‌آموزان کمک کرد که این باور را که اثبات از گزاره‌ها و دلایلشان تشکیل شده، به‌طور مؤثری به‌کار ببندند. تنوع نمادها و تعدد واژگان تخصصی، به‌عنوان محافظی در برابر خطر تبدیل شدن فعالیت تولید اثبات به جست‌وجو برای یافتن راهی متعارف برای نوشتن گزاره‌ها و دلایلشان، عمل می‌کرد. در عوض، در دسترس بودن سریع و مستقیم حکم‌هایی که می‌توانستند به‌عنوان دلیل استفاده شوند، باعث می‌شد که بتوان از آن‌ها به‌عنوان رهیافت‌هایی برای یافتن گزاره‌های مورد نیاز برای اثبات، استفاده کرد.

موضوع دیگری که دانش‌آموزان را در امر اثبات حمایت می‌کرد، نحوهٔ ارائهٔ شکل‌ها بود. نیوکمب و همکاران (۱۸۹۳) توصیه کرده بودند که دانش‌آموزان پای تخته‌سیاه، با استفاده از شکل، تمرین‌ها را به‌صورت شفاهی انجام دهند. یانگ و همکاران (۱۸۹۹) نیز بیان کرده بودند که معلمان باید به دانش‌آموزان «تمرین‌های زیادی بدهند که روابط را در یک شکل ببینند» (ص ۱۴۲).

برای اینکه دانش‌آموزان راحت‌تر بتوانند شکل‌ها را بررسی کنند، شولتز (۱۹۱۲) «روش‌های گرافیکی برای نمایش حقایق هندسی» را تهیه کرد که طرحی بود در جهت «از میان برداشتن مشکلات بیرونی» برای «دانش‌آموزانی که می‌توانند به‌صورت منطقی استدلال کنند»، اما «بعضی از قسمت‌های اثبات را فراموش می‌کنند و در نتیجه قادر به ادامه دادن اثبات نیستند» (ص ۱۱۰). شولتز همانند تعدادی از پیشینیانش، از شماره‌های کوچکی برای نشان دادن زاویه‌هایی که در اثبات مؤثرند، استفاده می‌کرد. همچنین، او پیشنهاد کرد که زاویه‌های قائمه با رسم مربع کوچکی، و زاویه‌های مساوی با رسم تعداد کمان‌های برابری داخل آن‌ها، مشخص شوند. نمادهای دیگری نیز برای نشان دادن خط‌های موازی و پاره‌خط‌های برابر، طراحی شدند. این «روش‌های گرافیکی» فقط برای نشان دادن فرض‌های مسئله نبود، بلکه برای تجزیه و تحلیل کردن فرض‌هایی بود که در صورت مسئله وجود داشت. برای مثال، به‌جای گفتن «یک مثلث متساوی‌الساقین را در نظر بگیرید»، مثلثی رسم می‌شد که روی هر یک از دو ضلع برابرش یک خط کوچک، و داخل هر یک از دو زاویه برابرش دو کمان کوچک کشیده شده بود. در واقع هدف از این کار نشان دادن این موضوع بود که آن فرض‌ها در اثبات استفاده می‌شوند.

قالب اثبات دوستونی: ثبات بخشیدن به درس هندسه

بخش‌های ۳ تا ۶ به شرح تکامل یک فرهنگ اثبات دانش‌آموزی اختصاص یافت. فرهنگی که همزمان با تلاش حرفهٔ معلمی و نویسندگان کتاب‌ها برای برآورده کردن این انتظار که درس هندسه باید به دانش‌آموزان هنر اثبات کردن را یاد دهد، توسعه یافت. تکاملی که در دورهٔ تمرین اتفاق افتاد، شامل تغییراتی در درس هندسه بود که بعضی از آن‌ها در جهتی متفاوت از تغییرات دورهٔ کارهای اصیل بود. این باور که تمام دانش‌آموزان باید بتوانند اثبات را یاد بگیرند، تمرین کنند و در انجام آن موفق باشند

اما از همـهٔ آن‌ها انتظار نرود کـه دانش جدید تولید کنند، از عواقب تغییر کارهای اصیل به تمرین‌ها بود. جهت باز کردن فضای کار بر روی تمرین‌ها و حمایت مؤثر از آن، تعداد «حکم‌های بنیادین» درس هندسه کاهش یافت؛ حکم‌هایی کـه دانش‌آموزان باید اثبات آن‌هـا را یـاد می‌گرفتند تا هـم روش اثبات کردن را بفهمند و هم بدانند که از چه چیزهایی در انجام اثبات می‌توانند اسـتفاده کنند. در این بخـش از آن روایت تاریخی استفاده می‌کنم تا بتوانم تفسیری دربارهٔ نقش قالب دوسـتونی در گسـترش آن فرهنگ، ارائه دهم. قصـد دارم این فرضیه را مطـرح کنم که قالب اثبات دوسـتونی، از طریق یکی کردن اثبات ارائه شـده در کتاب با اثبات خواسـته شـده از دانش‌آموز، به برنامهٔ درسی هندسه ثبات بخشید. در زیر بخش بعدی، این فرضیه را شرح خواهم داد.

تفاوت‌ها و شباهت‌های مسائل بنیادین و تمرین‌ها

دو اصطلاح «مسـائل بنیادین» و «تمرین‌ها» به دو دسـته از حکم‌هایی که باید اثبات می‌شدند اشاره داشتند. مدعی هسـتم که کارکرد متفاوتی که به هر کدام از این دو دسته اختصاص یافته بود، باعث ایجاد فاصله بین اثبات دانش‌آموز و اثبات معلم (و یا کتاب) می‌شد. برای مثال، در حالی‌که اثبات حکم‌های بدیهی در متن درس دیده نمی‌شـد، تمرین‌ها شامل مسائلی بودند که اثبات ساده‌ای داشتند و فقط با دیدن شکل آن‌ها، اجزای اصلی اثبات مشخص می‌شد. همچنین، در حالی‌کـه مسـائل بنیادین از ایـن جهت اهمیت داشـتند که اجزای اصلـی درس بودند و به این دلیل انتخاب شده بودند که در اثبات حکم‌های دیگر به کار آیند، معیار اصلی انتخاب تمرین‌ها فراهم کردن فرصت تمرین اثبات کردن بـرای دانش‌آموزان و موفقیت در آن بود و جذاب بودن آن‌ها و همچنین داشتن ارتباط منطقی با یکدیگر، اهمیتی نداشت.

به هر حـال، هر دو نوع از حکم‌هـا، صرف‌نظر از محتوایشـان، ابزارهایـی بـرای حمایت از مشـخصهٔ جدید درس، یعنـی تمرکز بر اثبات دانش‌آموزی بود. در واقـع، دانش‌آموزانی که بـرای تمام گزاره‌هایی که اثبات می‌کردند، باید دلیل می‌آوردند، نیاز به نتایجی قدرتمند داشتند که مسـائل بنیادین برایشان فراهم می‌کـرد. هرچه اثبـات مسـائل بنیادیـن قاطع‌تر و قانع‌کننده‌تر بود، دانش‌آموزان «زنجیرهٔ استدلال‌هایی را که به کشف و پدیدار شدن اثبات منجر می‌شدند» (یانـگ، ۱۹۰۶، ص ۲۶۱)، بهتـر می‌دیدند. بنابراین، اثبات مسـائل بنیادین، روشـن می‌سـاخت که چرا اثبات‌های ریاضی ضروری هسـتند و نشان می‌دادند که چه نوع استدلال‌هایی در اثبات استفاده می‌شوند. ارائهٔ آن اثبات‌ها برای معلمان هندسـه امری ضروری بود. چنین کاری فقط برای نشـان دادن درسـتی آن مسـائل نبود، بلکه مجوزی بـود که طبق آن معلمان می‌توانستند ادعا کنند که در کلاس درس، هنر اثبات را به‌طـور واقعی، تدریس می‌کنند. با این وجود، برای اطمینان از اینکه دانش‌آموزان واقعاً چنین هنر اثباتی را یـاد گرفته‌اند، لازم بود کـه دانش‌آموزان در تولید اثبات موفق عمل کنند. وجود تمرین‌ها در این جهت بود که دانش‌آموزان را کمک کند که با انجام بحث‌های سـاده‌تری، بدون اینکه موفقیتشان مشروط به یافتن ایدهٔ اثبات باشـد، جنبه‌های رسـمی اثبات را تمرین کنند. بنابراین، اگرچه هویت درس هندسـه براساس وابستگی متقابل بین تمرین‌ها و مسائل بنیادین شکل گرفت، اما شرط بقای آن، با فاصله گرفتن تمرین‌ها از مسائل بنیادین حاصل شد. همزمانیِ بین آن وابستگی و فاصله، موقعیتی مشـکل‌آفرین ایجاد کرد. در بخش بعـد توضیـح خواهم داد کـه چرا چنیـن وضعیتی مشکل‌آفرین بود.

اشاره داشتن مسائل بنیادین و تمرین‌ها به یک موضوع مشترک

بـا نمایان شـدن فاصله بین تمرین‌ها و مسـائل بنیادین، مشکلی که ایجاد می‌شد این بود که چه‌طور دو فعالیت متفاوت را مانند اثبات مسائل بنیادین و حل کردن تمرین‌ها، به یک موضوع مشترک در یادگیری، یعنی «هنـر اثبات کردن» ارتباط دهند؟ تمرین‌ها به لحاظ محتوایی بسیار متفاوت از مسائل بنیادین بودند. در حالی‌که مسـائل بنیادین اغلـب قضیه‌هایی مهم در هندسـه بودند و در اثبات مسـائل بعدی استفاده می‌شـدند، اما تمرین‌هایی بدیهی یا نتیجهٔ واضحی از یک حکم دیگر بودند و در فعالیت‌های دیگر استفاده‌ای نداشـتند. اثبات مسـائل بنیادین از نظر ریاضی باید به‌ترتیب انجام می‌شد، چراکه آن‌ها از لحاظ ریاضی به یکدیگر مرتبط بودند. اما اثبات حکم‌هایی که به‌عنوان تمرین مطرح شـده بودند، خیلی خسته‌کننده بود و حتی از نظر کسانی که متعصبانه اصرار به اثبات همه

چیز دارند، آن تمرین‌ها به اثبات نیازی نداشتند. برای قابل مقایسه نگه‌داشتن تمرین‌ها و مسائل بنیادین، باید اقدامی در مورد دستورالعمل‌های آموزشی صورت می‌گرفت، که این اقدام تزلزل و ناپایداری در موضوع مورد مطالعه را پدید آورد.

برای حل آن مشکل، اثبات به‌عنوان یک هدف و فعالیت در مبحث هندسه، باید که ورای تصور سنتی از آن، که فرایندی برای نشان دادن درستی یک حکم بود (لژاندر، ۱۸۴۱، ص۳)، توسعه یابد. تفاوت‌های بین مسائل بنیادین و تمرین‌ها باید کم‌رنگ شود و با به خدمت گرفتن هر دوی آن‌ها اهداف کلاس هندسهٔ دبیرستان، برآورده شود. به محض اینکه مسائل بنیادین و تمرین‌ها نمونه‌هایی از یک گونه در نظر گرفته شوند، می‌توان مسائل بنیادین را مقدمه‌ای برای تمرین‌ها دانست و در آن صورت تمرین‌ها را هم می‌توان معیاری معتبر برای ارزیابی میزان فهم دانش‌آموزان از مسائل بنیادین دانست. قالب اثبات دوستونی می‌تواند آن کار را انجام دهد، البته به این قیمت که اثبات را وسیله‌ای برای تدریس و یادگیری موضوعی بدانیم که بخش عمدهٔ آن در قالب یک کار منطقی انجام می‌گیرد تا در یک محتوای هندسی. حرکت از این قاعدهٔ ضمنی که اثبات به‌صورت کامل بیان شود (برای نمونه، ونت‌ورث، ۱۸۸۸)، به سمت توصیف کردن اثبات (برای نمونه، بمن و اسمیت، ۱۸۹۹) و سرانجام، بیان آن در قالب دوستونی (برای نمونه، شولتز و سون‌اوک، ۱۹۱۳)، بر روی تثبیت درس هندسه تأثیر داشته است. این کار باعث شد که در نظر دانش‌آموزان شباهت‌های دو کار متفاوت اثبات تمرین‌ها و اثبات حکم‌های بنیادین پررنگ‌تر گردد و آن شباهت‌ها را بهتر و ساده‌تر تشخیص دهند.

تأکید زیاد بر جنبه‌های رسمی اثبات، اجازهٔ نوعی داد و ستد را بین معلم و دانش‌آموزان هنگام اثبات مسائل بنیادین و تمرین‌ها می‌داد. این موضوع پذیرفته شده بود که خوانندگان پخته و بالغ برای درک یک اثبات نیاز ندارند که دلیل تمام گزاره‌ها را ببینند. در هر صورت، این انتظار از معلمان و کتاب‌های درسی وجود داشت که اثبات مسائل بنیادین را به‌صورت گزاره‌هایی همراه با دلایلشان ارائه کنند: اثبات باید به‌گونه‌ای ارائه شود که یک «مبتدی» هم متوجه شود که اثبات و بحث مورد نظر چگونه سرهم شده است (یانگ، ۱۹۰۶، ص۲۶۲).

نظر یانگ این‌طور بود که ارائه دادن هر گزاره به‌همراه دلیلش معادل این است که شرایطی که آن گزاره را به اثبات مرتبط می‌کند، شرح داده شود. اگر معلم مسئول باشد که چنان رهیافت‌هایی را به اشتراک بگذارد، می‌تواند دانش‌آموزان را قادر سازد تا اثبات مسائل بنیادین را کشف کنند. معلم با بحثی مشابه قادر است دانش‌آموزان را به سمت ارائهٔ اثبات‌های رسمی، که در قالب دوستونی تجسم یافته است، سوق دهد- معلم می‌تواند وانمود کند که اثبات انجام شده توسط دانش‌آموزان تا وقتی که دلیل تمام گزاره‌ها بیان نشده باشد، قابل فهم نخواهد بود. بنابراین از یک‌سو، معلم باید از قالب اثبات دوستونی برای توضیح *اثبات* به دانش‌آموزان (در جهت کمک به فهم بهتر) استفاده کند؛ و از سوی دیگر، دانش‌آموزان نیز باید قالب دوستونی را برای توضیح *اثبات* به معلم (در جهت نشان دادن کار خود) به‌کار ببرد.

معلم می‌تواند وانمود کند که اثبات انجام شده توسط دانش‌آموزان تا وقتی که دلیل تمام گزاره‌ها بیان نشده باشد، قابل فهم نخواهد بود. بنابراین از یک‌سو، معلم باید از قالب اثبات دوستونی برای توضیح اثبات به دانش‌آموزان (در جهت کمک به فهم بهتر) استفاده کند؛ و از سوی دیگر، دانش‌آموزان نیز باید قالب دوستونی را برای توضیح اثبات به معلم (در جهت نشان دادن کار خود) به‌کار ببرد

فرهنگ اثبات دوستونی در برآورده کردن توصیه‌هایی که دربارهٔ درس هندسه انجام شده بود موفق عمل کرد، اما این موفقیت رایگان به‌دست نیامد. در واقع جنبهٔ منطقی اثبات بسیار پررنگ شد و در عوض نقش اثبات در ساختن دانش از بین رفت. پرسش‌هایی در مورد مرتبط بودن و میزان سختی حکم‌های اثبات شده، و همچنین دربارهٔ میزان موفقیت و قابل استفاده بودن نظریه‌های مطرح شده، در حاشیه ماندند. رخ دادن این اتفاق به این خاطر نبود که چنین موضوع‌هایی طرفدار نداشتند (دیویی[۴]، ۱۹۰۳؛ مور[۵]، ۱۹۰۲؛ اسمیت، ۱۹۰۹)، بلکه شاید به این دلیل بود که در عمل، سازگار کردن چنان موضوعاتی با این الزام که در درس هندسه باید به همهٔ دانش‌آموزان هنر اثبات کردن تدریس شود، مشکل بود.

نتیجه‌گیری: از تاریخ اثبات در هندسه، چه می‌توانیم یاد بگیریم؟

واقعیت‌های تاریخی در مورد اینکه چگونه درس هندسه در دبیرستان، الزام تدریس هنر اثبات کردن را پذیرفت، شباهت‌هایی مهم و قابل تأمل را در مورد تأکیدهای اخیر بر وجود اثبات در آموزش ریاضی، خاطرنشان می‌سازد. یاد می‌گیریم که گنجاندن اثبات دانش‌آموزی به‌عنوان عضوی دستوری[۶] در برنامهٔ درسی، شامل فعالیت‌های مهمی است که طبیعتی نظام‌مند دارند. بسیاری از جنبه‌های برنامهٔ درسی هندسه درگیر پاسخ‌گویی به خواستهٔ کمیتهٔ ده نفره

بودنـد. به‌ویژه اینکه تغییـرات در نقش دانش‌آموزان به‌عنوان یادگیرنده‌ها، هم بر تغییرات ماهیت موضوع مورد مطالعه تأثیر گذاشت و هم از آن تأثیر پذیرفت. همچنین برای اینکه اثبـات دانش‌آموزی امکان‌پذیر شـود، نظامی از منابع باید برای آن‌ها فراهم می‌شـد تـا اثبات‌ها را با موفقیت انجام دهند. تجمیع تمام آن عناصر، یک درس هندسهٔ پایدار را با این جهت‌گیری که دانش‌آموزان هنر اثبات کردن را یاد بگیرند، تولید کرد و این امر در قالب دوسـتونی تجسم یافت. به هر حال، این پایداری هزینه‌ای در پی داشت- که عبارت بود از جدا سـازی اثبات کردن از سـاختن دانش. در حالی‌که تلاش‌های چشم‌گیری در جهت تغییر دادن نقش اثبات در هندسهٔ مدرسه‌ای در قرن بیستم اتفاق افتاده بود (برای نمونه، فاوست، ۱۹۳۸)، تقلیل اثبات به جنبهٔ منطقی و رسـمی آن، طی قریب به یک قرن اخیر تداوم داشـته اسـت. نظر یکی از دانشـجوهای خودم در دورهٔ کارشناسی، کم و بیش چنین موضوعی را بیان می‌کند: «ما در مدرسـه عمـل اثبات را انجام می‌دادیم، اما چیزی را اثبات نمی‌کردیم.»

وقتـی بـه توصیه‌هـای حاضـر مبنی بـر اینکه دانش‌آمـوزان باید در طول سـال‌های تحصیل خود مشغول اثبات کردن در تمام موضوعات باشند (شورای معلمان ریاضی آمریکا، ۲۰۰۰) فکر می‌کنیم، باید آن درس‌هایـی را کـه از تاریخ گرفته‌ایم در نظر داشـته باشـیم. نخسـت اینکه، توصیه‌های دسـتوری لزوماً قابلیت اجرا ندارند و برای اجرای آن‌ها باید یک‌سـری فعالیت‌ها انجام شود که عمدتاً ماهیتی نظام‌مند دارند. جهت تبدیل شدن اثبات به یک عنصر مهم و اصلی در ریاضی مدرسه‌ای، باید اقداماتی نیز در مورد بسیاری از عناصر دیگر انجام پذیرد. باید بپرسیم که آیا نگاه ما در مورد اثبات با درک ما از دانش‌آموز به‌عنوان یادگیرنده و موضوع‌هـای ریاضی مـورد مطالعـه، جایی که آن یادگیری قرار اسـت اتفاق بیفتد، همبسـتگی دارد؟ به‌علاوه، چه نوع از منابع و قواعدی جهت قادر ساختن دانش‌آموزان برای انجام اثبات لازم است؟ چنان اثباتی که سـزاوار جایگاهی در دروس مدرسه‌ای باشد و در ضمن با اهدافی که ما برای یادگیری دانش‌آموزان طی فعالیت‌هـای کلاسـی در درس ریاضی در نظر داریم، همبستگی داشته باشد.

درس دوم این اسـت که اگـر می‌خواهیم در مورد مشغول شدن دانش‌آموزان به امر اثبات صحبت کنیم، خطرنـاک خواهد بود که چنین بحث و صحبتی بدون

این باور که تمام دانش‌آموزان باید بتوانند اثبات را یاد بگیرند، تمرین کنند و در انجام آن موفق باشند اما از همهٔ آن‌ها انتظار نرود که دانش جدید تولید کنند، از عواقب تغییر کارهای اصیل به تمرین‌ها بود

توجه به موضوع توسـعهٔ دانش دربارهٔ ایده‌های ریاضی ویژه و یافتن نتایجی جالب در مورد آن ایده‌ها، باشد. از لاکاتوش (۱۹۷۶، ۱۹۷۸) یاد می‌گیریم که اثبات ریاضی یک فرایند منطقی کلی نیست، بلکه ابزاری روشمند و بنیادی جهت توسعه و شکل دادن مفاهیم است تا بدانیم که کدام یک از قضیه‌ها می‌تواند درست باشد و چرا؟ اگر نقش ارزشمند اثبات به‌عنوان ابزاری برای خلق دانش، شایستهٔ جایگاهی در کلاس‌های درسی باشد- که فکر می‌کنم همین‌طور باشد- لازم است نسبت به این تصور بدگمان باشیم که اثبات چیزی مستقل از زمینهٔ فعالیت ریاضی است که در آنجا استفاده می‌شود. اثبات و انجام آن، بسته به پرسشی که مطرح می‌شود و دانش و ابزاری که در دسترس افرادی است که قصد حل آن پرسش را دارند، ممکن است متفاوت به‌نظر برسد. ضروری بودن وجود اثبات در آموزش ریاضی، فقط به این دلیل نیست که فرایندی ارزشـمند برای درگیر کردن دانش‌آموزان است (مانند توسعهٔ ظرفیت دانش‌آموزان در استدلال‌های ریاضی)، بلکـه این دلیل که یکی از جنبه‌های ضروری در ساختن دانش است، بسیار مهم‌تر است. این مطالعهٔ تاریخی دربارهٔ تحول و توسعهٔ اثبات در آموزش آمریکا، پیشنهاد می‌کند که در نظر گرفتن اثبات به‌عنوان یک شـی مجزای مورد مطالعه، دانش‌آموزان را در استفاده از اثبات به‌عنوان ابزاری برای دانستن، تواناتر نمی‌سازد؛ بلکه تمرین برای اثبات کردن را از تمرین برای دانستن جدا می‌کند.

منصفانه نیست که تحول و تکامل فرهنگ اثبات دوسـتونی را با معیارهای امـروزی قضاوت کنیم. به همان اندازه غیرمنصفانه اسـت کـه تأکید دوباره بر حضور اثبات در آمـوزش را به‌عنوان توجیهی جهت اصـرار بر آمـوزش و یادگیری «هنـر اثبات کردن» بدانیم. اصول و اسـتانداردها (شورای معلمان ریاضی آمریـکا، ۲۰۰۰) عناصری را فراهم کـرد که بتوان کلاسـی را تصور کرد کـه در آن همـکاری فعالانهٔ دانش‌آمـوزان در تولیـد ادعاهایـی در دانش با این مسـئولیت همراه شود که در مورد منطقی بودن آن

ادعاهـا بحث انجام شـود. در نتیجه لازم اسـت که ابزارهایی را برای اثبات و اسـتدلالِ اسـتاندارد مهیا کنیـم که وقتی از دانش‌آموزان خواسـته می‌شـود اسـتدلال یا اثباتی ارائه کنند، بیـن محتوا و قالب، تعادل برقرار گردد. پرسش مهم و حیاتی این نیست کـه آیا اسـتدلال‌های دانش‌آمـوزان در قالبی ارائه شـده‌اند که مورد تأیید منطق‌دان‌ها باشد، بلکه این نکته مهم اسـت که آیا دانش‌آموزان با اشیاء ریاضی که جامعهٔ مطلعین[۷] می‌خواهند دربارهٔ آن‌ها بیشـتر بدانند، سازگار شده‌اند یا نه.

پی‌نوشت‌ها

1. Hilbert
2. Common Sense
3. George Carson
4. Dewey
5. Moore
6. Normative
7.Community of Knowers

منابع

1. Baker, J.: 1969, 'Minority report to the national council of education', in National Education Association, *Report of the Committee on secondary school studies*, Arno Press, New York, pp. 56–59. (Original work published 1893)
2. Ball, D.L. and Bass, H.: 2000, 'Making believe: The collective construction of public mathematical knowledge in the elementary classroom', in D. Phillips (ed.), *Constructivism in Education: Yearbook of the National Society for the Study of Education*, University of Chicago Press, Chicago, pp. 193–224.
3. Beman, W. and Smith, D.E.: 1899, *New Plane and Solid Geometry*, Ginn, Boston.
4. Carson, G.: 1913, *Essays on Mathematical Education*, Ginn, London.
5. Chauvenet, W.: 1870, *A Treatise on Elementary Geometry with Appendices containing a Collection of Exercises for Students and an Introduction to Modern Geometry*, Lippincot, Philadelphia.
6. Chauvenet, W.: 1898, *Treatise on Elementary Geometry*, W. Byerly (ed.), Lippincot, Philadelphia. (Original work published 1887)
7. Davies, C.: 1850, *The Logic and Utility of Mathematics, with the Best Methods of Instruction Explained and Illustrated*, Barnes, New York.
8. Dewey, J.: 1903, 'The psychological and the logical in teaching geometry', *Educational Review* 25, 387–399.
9. Donoghue, E.: 1987, *The Origins of a Professional Mathematics Education Program at Teachers College*, Unpublished doctoral dissertation. Columbia University Teachers College.
10. Eliot, C. et al.: 1969, 'Report of the Committee of Ten to the National Education Association', in National Education Association, *Report of the Committee on secondary school studies*, Arno Press, New York, pp. 3–5. (Original work published 1893)
11. Eliot, C.: 1905, 'The fundamental assumptions in the report of the Committee of Ten (1893)', *Educational Review* 30, 325–343.
12. Fawcett, H.: 1938, *The Nature of Proof – The National Council of Teachers of Mathematics Thirtheenth Yearbook,* Bureau of Publications of Teachers College, Columbia University, New York.
13. Greenleaf, B.: 1858, *Elements of Geometry with Practical Applications to Mensuration,* Robert Davis, Boston.
14. Halsted, G.: 1893, 'The old and the new geometry', *Educational Review* 6, 144–157.
15. Harris, W.T.: 1894, 'The committee of ten on secondary schools', Educational Review 7, 1–10.
16. Hilbert, D.: 1971, *Foundations of Geometry*, L. Unger, Trans., P. Bernays, Rev.. Open Court, La Salle, IL. (Original work published in German in 1899)
17. Hill, F.: 1895, 'The educational value of mathematics', *Educational Review* 9, 349–358.
18. Howson, G.: 1982, *A History of Mathematics Education in England,* Cambridge University Press, Cambridge.
19. Jones, P.: 1944, 'Early American geometry', *The Mathematics Teacher* 37, 3–11.
20. Kilpatrick, J.: 1992, 'A history of research in mathematics education', in D. Grouws (ed.), *Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning*, Macmillan, New York, pp. 3–38.
21. Kliebard, H.: 1986, *The Struggle for the American Curriculum* 1893–1958, Routledge and Kegan Paul, Boston.
22. Kline, M.: 1965, 'View of the new math', in E. Moise, A. Calandra, R. Davis, M. Kline and H. Bacon (eds.), *Five Views of the "New Math'*, (Council for Basic Education, Washington, DC, pp. 13–16.
23. Krug, E.: 1964, *The Shaping of the American High School*, Harper and Row, New York.
24. Lakatos, I.: 1976, *Proofs and Refutations: The Logic ofMathematical Discovery*, J.Worrall and E. Zahar (eds.), Cambridge University Press, Cambridge.
25. Lakatos, I.: 1978, 'A renaissance of empiricism in the recent philosophy of mathematics?' in J. Worrall and G. Currie (eds.), *Imre Lakatos. Mathematics, Science and Epistemology: Philosophical Papers*,

Cambridge University Press, Cambridge, Vol. 2, pp. 24–42.
(Original work published in 1967)
26. Legendre, A.-M.: 1819, *Elements of Geometry,* J. Farrar (ed. and trans.), Hilliard and Metcalf, Cambridge, New England.
27. Legendre, A.-M.: 1841, *Elements of Geometry*, J. Farrar (ed. and trans.), Hilliard Gray, Boston.
28. Legendre, A.-M.: 1848, *Elements of Geometry and Trigonometry*, D. Brewster (trans.), C. Davies (rev. and ed.), Barnes, New York.
29. Moore, E.H.: 1926, 'On the foundations of mathematics', in C. Austin, H. English, W. Betz, W. Eells and F. Touton (eds.), *A General Ssurvey of Progress in the Last Twenty- Five Years: First Yearbook*, National Council of Teachers of Mathematics, Washington, DC, pp. 32–57. (Original speech delivered in 1902)
30. NCTM: 2000, *Principles and Standards for School Mathematics*, Author, Reston, VA.
31. Newcomb, S. et al.: 1893, 'Reports of the conferences: Mathematics', in National Education Association, *Report of the Committee on secondary school studies*, Arno Press, New
York, pp. 104–116. (Original work published 1893)
32. Nightingale, A. et al.: 1899, 'Report of the Committee on College entrance requirements', in National Education Association, *Report of Committee on College Entrance Requirements – July*, 1899, NEA, Chicago, pp. 5–49.
33. Playfair, J.: 1860, *Elements of Geometry; Containing the First Six Books of Euclid, with a Supplement on the Quadrature of the Circle, and the Geometry of Solids. To which are Added Elements of Plane and Spherical Trigonometry*, Collins and Hannay, New York. (Original work published 1795)
34. Poincaré, H.: 1899, 'La logique et l'intuition dans la science mathématique et dans l'enseignement', *L'Enseignement Mathématique* 1, 157–162.
35. Quast, W.G.: 1968, *Geometry in the High Schools of the United States: An Historical Analysis from 1890 to 1966*, Unpublished doctoral dissertation. Rutgers – The State University of New Jersey, New Brunswick.
36. Rav, Y.: 1999, 'Why do we prove theorems?' *Philosophia Mathematica* 7, 5–41.
37. Ravitch, D.: 2000, Left Back: *A Century of Failed School Reforms*, Simon and Shuster, New York.
38. Richards, E.: 1892, 'Old and new methods in elementary geometry', *Educational Review* 3, 31–39.
39. Schoenfeld, A.: 1987, 'On having and using geometrical knowledge', in J. Hiebert (ed.), *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics,* Erlbaum, Hillsdale, NJ, pp. 225–264.
40. Schultze, A.: 1912, *The Teaching of Mathematics in Secondary Schools,* MacMillan, New York.
41. Schultze, A. and Sevenoak, F.: 1901, *Plane and Solid Geometry*, MacMillan, New York.
42. Schultze, A. and Sevenoak, F.: 1913, *Plane Geometry*, A. Schultze, (rev.),MacMillan, New York.
43. Shibli, J.: 1932, *Recent Developments in the Teaching of Geometry*, Author, State College, PA.
44. Shutts, G.: 1892, 'Old and new methods in geometry', *Educational Review* 3, 264–266.
45. Simson, R.: 1756, *The Elements of Euclid, viz. the First Six Books together with the Eleventh and Twelfth. In this edition, the Errors, by which Theon, or others, have long ago vitiated these Books, are corrected, and some of Euclid's Demonstrations are Restored,* Foulis, Glasgow.
46. Sizer, T.: 1964, *Secondary Schools at the Turn of the Century*, Yale University Press, New Haven.
47. Slaught, H. et al.: 1912, 'Final report of the National Committee of Fifteen on geometry syllabus', *The Mathematics Teacher* 5, 46–131.
48. Smith, D.E.: 1911, *The Teaching of Geometry*, Ginn, Boston.
49. Smith, E.R.: 1909, *Plane Geometry Developed by the Syllabus Method,* American Book Co, New York.
50. Stanic, G.M.A.: 1983, *Why Teach Mathematics? A Historical Study of the Justification Question*, Unpublished doctoral dissertation. University of Wisconsin, Madison.
51. Stanic, G.M.A.: 1987, 'Mathematics education in the United States at the beginning of the twentieth century', in T. Popkewitz (ed.), *The Formation of School Subjects: The Struggle for Creating an American Institution*, Falmer, New York, pp. 145–175.
52. Wells, W.: 1887, *The Elements of Geometry*, Leach, Shewell, and Sanborn, Boston.
53. Wells, W.: 1908, *New Plane and Solid Geometry*, Heath, Boston.
54. Wentworth, G.: 1878, *Elements of Geometry*, Ginn and Heath, Boston.
55. Wentworth, G.: 1888, *A Text-Book of Geometry*, Ginn, Boston.
56. Wentworth, G.: 1899, *Plane and Solid Geometry*, Ginn, Boston.
57. Young, J.W.A. et al.: 1899, 'Report of the Committee of the Chicago section of the American Mathematical Society', in National Education Association, *Report of Committee on College Entrance Requirements – July, 1899*, NEA, Chicago, pp. 135–149.
58. Young, J.W.A.: 1906, *The Teaching of Mathematics in the Elementary and the Secondary School*, Longmans, Green, and Co, New York.